Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

Alyson Lucas Pereira Santos

Uma introdução à Topologia Geral

Maceió
2020

Alyson Lucas Pereira Santos

Uma introdução à Topologia Geral

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Maceió

2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237i Santos, Alyson Lucas Pereira.
Uma introdução à topologia geral / Alyson Lucas Pereira Santos. - 2021.
30 f. : il.

Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 30.

1. Topologia. 2. Homeomorfismos. 3. Espaços métricos. 4. Espaços quocientes. I. Título.

CDU: 515.12

Alyson Lucas Pereira Santos

Uma introdução à Topologia Geral

Trabalho de conclusão de curso aprovado pelo corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió
Orientadora

Prof. Dr. André Luiz Flores
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió
Examinador

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió
Examinador

Maceió, 16 de Novembro de 2020

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre."

Paulo Freire

Agradecimentos

Aqui dedico um pouco de minhas palavras a minha família e amigos que sem eles, não conseguiria chegar até aqui.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha família, meus pais que sempre me apoiaram desde que passei no vestibular, irmão e primos, em especial Ronaldo que assim que entrei me deu maior força.

Para agradecer meus amigos tenho que separar por partes, primeiro agradeço ao Anderson Amorim, que sem ele nem teria a noticia que tinha sido aprovado ou conseguido fazer a matricula, alem de todos os momentos de estudos e resenhas durante todo esse tempo. Agradeço todas as companhias das viagens do ônibus, vezes quebrado nas canas ou dormindo no percurso, Karol Lima, Karol Rocha, Alderis, Rayane, Alexsandra, Thairini, Tamires, Alessandro, Débora, Flávia, Estefany e tantas outras pessoas que me aturaram neste percusso.

A UFAL me fizeram conhecer pessoas que proporcionaram momentos incríveis, seja por meio do curso, do Centro Acadêmico, destas pessoas destaco Raphael Omena e Ranilze que além das idas e vindas e mais idas ao RU, me aturou bastante e ajudou em diversas matérias, pesquisas diversas vezes. Também queria deixar registrado um agradecimento a Cícero Calheiros, Denilson Tenório, Abnaldo e Eduardo Santana, pessoas que morei e pudemos estudar e divertir bastante. Agradeço também minha Orientadora Juliana, por acreditar em mim, antes mesmo de fazer parte do corpo docente da UFAL. Graças ao PIBIC conheci duas pessoas que me ajudaram mais do que muito, Givaldo e Marcos. Marcos não só me ajudou muito no decorrer do curso, mas não deixou me desanimar apesar das adversidades. Profº. Dr. Isnaldo Isaac foi bem mais do que um professor, esteve sempre ajudando os alunos, sejam em ações esportivas, com assuntos, livros e o cafezinho sem açúcar, pessoa fundamental na minha permanência no curso e de tantas outras pessoas.

Obrigado a todos que contribuíram com uma conversa, um racha, um ombro pra

dormir, pelo apoio nessa jornada.

Resumo

Neste trabalho faremos uma introdução ao estudo da Topologia Geral à partir da generalização dos conceitos vistos na Teoria dos Espaços Métricos. Iremos construir e definir os espaços topológicos e estudar as funções contínuas entre esses os mesmos. Exploramos algumas propriedades especiais entre tais espaços e discutiremos suas semelhanças e distinções do ponto de vista topológicos.

Palavras chave: **Topologia, Homeomorfismo e Topologia Quociente.**

Abstract

In this work we will make an introduction to the study of General Topology based on the generalization of the concepts seen in the Theory of Metric Spaces. We will build and define topological spaces and study the continuous functions between them. We explore some special properties between such spaces and discuss their similarities and distinctions from a topological point of view.

keywords: **Topology, Homeomorphism and Quotient Topology.**

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Podemos dizer que o surgimento se deu a partir da tentativa da reformulação do cálculo diferencial. A partir dai começou a se pensar numa linguagem matemática, passando essa reformulação por nomes como D'Alembert, Cauchy, Bolzano e Weierstrass dentre tantos outros grandes nomes.

A topologia Geral esta ligada ao fato de determinar e classificar espaços topológicos, poder distinguir suas propriedades que podem ser feitos com bases nos axiomas, sejam eles os axiomas de separação ou axiomas de enumerabilidade.

Na topologia utilizam-se os objetos da geometria, com uma pequena diferença, no caso da topologia não importa a distância, nem configuração de seus pontos. Importam o fato de poder modificar objetos com base em funções contínuas em invertíveis, podemos notar isso nos homeomorfismos. Podemos ter quadrados e círculos iguais do ponto de vista topológico, assim como outros espaços e conjuntos diversos.

Capítulo

1

Noções básicas sobre espaços Métricos

1.1 Métricas

Para definirmos um espaço métrico, precisamos antes saber o que é uma Métrica

Definição 1.1.1. *Dado um conjunto arbitrário $M \neq \emptyset$, definimos uma métrica sobre M, como uma função $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$, Associando assim a um par de elementos $a, b \in M$ um número real não-negativo $d(a,b)$, chamada distância de a até b, satisfazendo as seguintes condições*

(i) $d(x,y) \geq 0$, *e* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) *se* $x \neq y$, $d(x,y) > 0$;

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

quaisquer que sejam $a, b, c \in M$.

Um espaço métrico é o par ordenado (M, d) onde M é um conjunto não vazio e d a métrica sobre M. Chamaremos por "o espaço métrico M", quando não gerar dúvida deixando subentendida a métrica d a ser considerada.

Observação 1.1.2. *O postulado 3 se refere a propriedade de simetria dos elementos. O postulado 4 é conhecido como desigualdade triangular, que na geometria básica diz que a soma de dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro.*

Exemplo 1.1.3. *Para exemplificar de maneira simples podemos definir em qualquer conjunto $M \neq \varnothing$ uma métrica, pondo a distância de dois pontos distintos como sendo igual a 1 e a distância de um ponto a ele mesmo igual a 0. Daí teríamos:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & se\ a = b \\ 1, & se\ a \neq b \end{cases} \tag{1.1.1}$$

O exemplo citado acima é conhecido como a métrica "zero-um"o exemplo mais trivial de espaço métrico.

Exemplo 1.1.4. *O exemplo mais importante e mais conhecido que podemos dar é da distância no conjunto números reais $\mathbb{R}$. Onde definimos a distância de quaisquer pontos a e $b \in \mathbb{R}$ por $d(a,b) = |a-b|$. Podendo se verificar facilmente que satisfazer as condições de métricas.*

Exemplo 1.1.5. *Considerando o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ formado pelas n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, podemos definir três métricas sobre este conjunto. Com efeito, sejam $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ pontos arbitrários de $\mathbb{R}^n$ então tais métricas são dadas por*

$$d(a,b) = [(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2]^{1/2} \tag{1.1.2}$$

$$d_1(a,b) = |a_1 - b_1| + \ldots + |a_n - b_n| \tag{1.1.3}$$

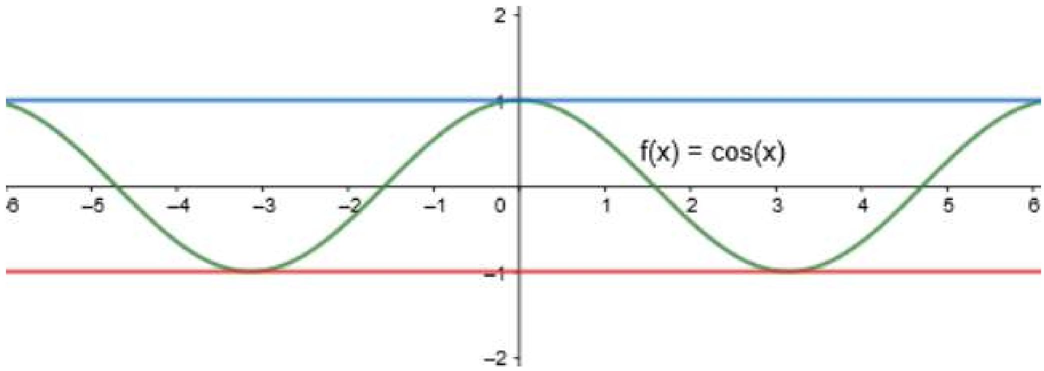
$$d_2(a,b) = max\{|a_1 - b_1|, \ldots, |a_n - b_n|\} \tag{1.1.4}$$

As métricas d_1 e d_2 possuem verificação imediata, já d requer um pouco mais de trabalho, não demonstraremos no decorrer desta monografia pois não é o foco principal deste trabalho.

Definição 1.1.6. *Dado X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$, diz-se limitada quando, existe uma constante $k > 0$ tal que, $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$.*

Exemplo 1.1.7. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por,* $f(x) = \cos(x)$ *é uma função limitada.*

Figura 1.1: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$



Fonte: Autor, 2020.

Proposição 1.1.8. *A soma, diferença e produto de funções limitadas são limitadas.*

Demonstração. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Então existem k_1, k_2 reais positivos, tais que. $|f(x)| < k_1$ e $|g(x)| < k_2$, $\forall x \in X$.

- Soma é limitada, pois

  $|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_1 + k_2.$

- A diferença é limitada

  $$|(f-g)(x)| = |f(x)-g(x)| = |-f(x)+g(x)| \leq |-f(x)|+|g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \leq k_1+k_2$$

  Portanto $|(f - g)(x)| \leq k_1 + k_2$, daí a diferença é limitada.

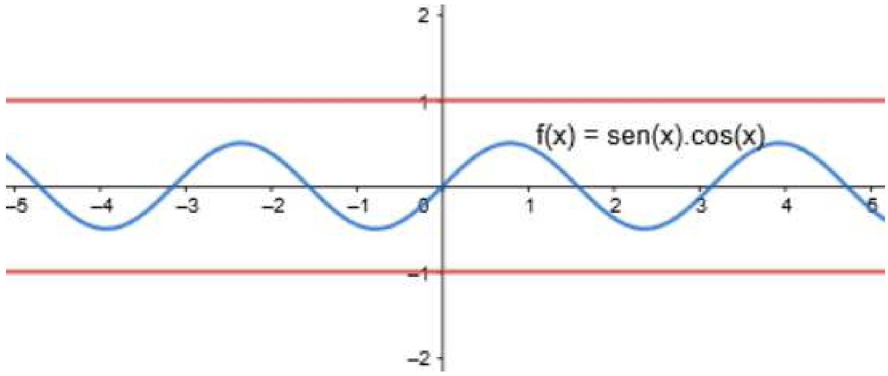
- O produto é limitado, de fato

  $|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq k_1 \cdot k_2$

$\square$

Exemplo 1.1.9. *Vamos aqui dar um exemplo de produto limitado, sabemos que tanto a função* $\sin(x)$ *como* $\cos(x)$ *são limitadas, variando entre -1 e 1.*

Figura 1.2: Gráfico da função $f(x) = sen(x)cos(x)$



Fonte: Autor, 2020.

1.2 Bolas e Esferas

Dado um ponto a no espaço métrico M, dado um número real $r > 0$. Definimos:

Definição 1.2.1. *A bola aberta de centro a e raio r. É o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M tais que a distancia ao ponto a é menor que r, ou seja.*

$$B(a;r) = \{x \in M;\ d(x,a) < r\} \tag{1.2.1}$$

Definição 1.2.2. *A bola Fechada de centro a e raio r. É o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M tais que a distancia ao ponto a é menor ou igual que r, ou seja.*

$$B[a;r] = \{x \in M;\ d(x,a) \leq r\} \tag{1.2.2}$$

Definição 1.2.3. *A esfera de centro a e raio r. É o conjunto $S(a;r)$ dos pontos de M tais que a distancia ao ponto a é igual a r, ou seja.*

$$S(a;r) = \{x \in M;\ d(x,a) = r\} \tag{1.2.3}$$

Exemplo 1.2.4. *As bolas no $\mathbb{R}^2$ com as métricas d, d_1 e d_2, tem formatos geométricos diferentes, mesmo possuindo centro e raio iguais.*

Para facilitar as contas, utilizaremos o centro $C = (0, 0)$ *e raio* $r = 1$.

(i) Consideremos primeiro a métrica $d(x, y)$ *temos que;*
$d((0, 0),(x, y)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, *então:*

$$B[C; 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(ii) Seja agora a métrica $d_1(x, y)$ *temos que;*
$d_1((0, 0),(x, y)) = |x - 0| + |y - 0| = |x| + |y|$ *Assim,*

$$B[C; 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$$

(iii) Finalmente, a métrica $d_2(x, y)$ *chegamos*
$d_2((0, 0),(x, y)) = max\{|x - 0|, |y - 0|\} = max\{|x|, |y|\}$.

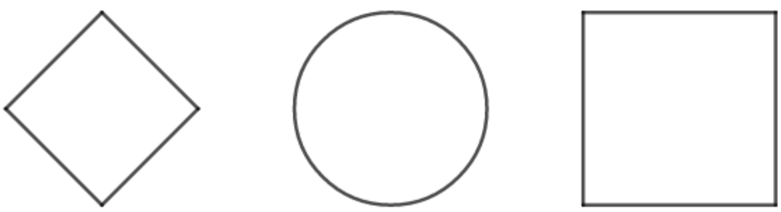
Daí

$$B[C; 1]\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$

temos os seguintes casos

Observe as formas que as bolas no $\mathbb{R}^2$ *podem assumir.*

Figura 1.3: Representação das bolas no $\mathbb{R}^2$ pelas métricas d, d_1 e d_2.



Fonte: Autor, 2020.

1.3 Conjuntos Abertos

Definição 1.3.1. *Sejam M um espaço métrico e um subconjunto $X \subset M$. Dizemos que $a \in X$ é um ponto interior a X quando existe $r > 0$ tal que a bola aberta de raio r centrada em a está toda contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r$ então $x \in X$. Assim, o ponto $b \in X$ não é interior a X se existir algum ponto que não pertence a X em toda bola aberta de centro b.*

Definição 1.3.2. *Definimos a fronteira de X em M (onde denotaremos por ∂X), como o conjunto formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém uma parte pertencente a X e a outra no seu complementar $M - X$.*

Exemplo 1.3.3. *Na reta, o interior do intervalo $[0, 1)$ é o intervalo aberto $(0, 1)$ e sua fronteira possui apenas os pontos $0, 1$.*

Evidentemente, se $a \in (0, 1)$ então $0 < a < 1$ e tomando $r = min\{a, 1 - a\}$, então garantimos que $(a - r, a + r) \subset (0, 1]$. Logo a é interior a $(0, 1]$. $0 \notin (0, 1]$ mas, como toda bola de centro 0 contém pontos negativos e positivos, então $0 \in \partial(0, 1]$. Agora observe que toda bola de centro 1, contém pontos menos que 1 e maiores que 1 temos também que $1 \in \partial(0, 1]$.

Exemplo 1.3.4. *Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Não existe ponto interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, pois não existe intervalo aberto formado apenas por números racionais, ou seja, qualquer intervalo aberto contém números racionais e irracionais, logo a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$.*

Definição 1.3.5. *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se aberto em M, quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $int(X) = X$. Assim $x \subset M$ é aberto se, e somente se, $X \bigcap \partial X = \emptyset$.*

Proposição 1.3.6. *Sejam A e B conjuntos abertos, então $A \cap B$ é aberto.*

Demonstração. Se A é aberto, então para cada a $\in$ A, existe $r_A > 0$ tal que $B(a; r_A) \subset A$. Do mesmo modo, se B é aberto, então para cada b $\in$ B, existe $r_B > 0$ tal que $B(b; r_B) \subset B$. Seja assim $A \bigcap B \neq \emptyset$ então existe $x \in A \bigcap B$, ou seja, $x \in A$ *e* $x \in B$ Como A e

B são abertos, existem $r_A, r_B > 0$ tais que $B(x; r_A) \subset A$ e $B(x, r_B) \subset B$ tomando $r = min\{r_A, r_B\}$ então $B(x; r) \subset B(x; r_A) \subset A$ e $B(x, r) \subset B(x, r_B) \subset B$. Logo a bola $B(x; r) \subset A \bigcap B$. Portando, A $\bigcap$ B é aberto.

□

Proposição 1.3.7. *Dado qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja x $\in B(a; r)$ então a $d(x, a) < r$, então $r - d(x, a) > 0$. Tome então $s = r - d(x, a)$. Afirmamos que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Evidente, se $y \in B(x; s)$ então a $d(x, y) < s$ daí $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$. Portanto y $\in B(a; r)$.

□

Definição 1.3.8. *Um ponto a num espaço métrico M é chamado de ponto isolado em M quando existe uma bola aberta de centro a e raio $r > 0$ que contém apenas a, ou seja, $B(a; r) = \{a\}$.*

Exemplo 1.3.9. *Um ponto a em um espaço métrico M, é um conjunto aberto em M se, e somente se, é um ponto isolado.*

De fato, se $\{a\}$ é aberto, então $\forall x \in \{a\}$, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset \{a\} \Rightarrow \exists r > 0$ tal que $B(a; r) \subset \{a\}$. Como $a \subset B(a; r)$ então $a = B(a; r)$. Portanto, a é isolado.

Reciprocamente, se a é isolado em M, então existe $r > 0$, tal que $B(a; r) = \{a\}$, assim a $B(a; r) \subset \{a\}$, então $\forall x \in \{a\}$ existe $r > 0$ tal que, $B(x; r) \subset \{a\}$. Logo, $\{a\}$ é aberto.

Definição 1.3.10. *Sejam M e N espaços métricos e $a \in M$. Dizemos que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto a quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $x \in B(a; \delta)$ implique $f(x) \in B(f(a); \varepsilon)$.*

Proposição 1.3.11. *Sejam M e N espaços métricos. A função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Suponhamos que f seja contínua, queremos mostrar que dado A' aberto em N, $f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada a $\in f^{-1}(A')$, temos que $f(a) \in A'$ daí, por definição, existe $r > 0$ tal que $B(f(a); r) \subset A'$. Sendo f contínua em a, segue que por definição, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a); r) \subset A'$, ou seja, $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A')$ Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(A')$ de cada $A' \subset N$ aberto seja um aberto em M. Queremos mostrar que f é contínua. De fato, seja a $\in$ M. Dado $r > 0$, a bola $B(f(a); r)$ é um aberto em N. Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto em M, contendo a, então, existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A')$, ou seja, $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a); r)$. E portanto, f é contínua em a.

$\square$

Observação 1.3.12. *Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se aberta para cada aberto $A \subset M$, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto de N.*

1.4 Conjuntos Fechados

Definição 1.4.1. *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$ um ponto a chama-se aderente a X, quando $d(a, X) = 0$. Isto é, existem pontos de X próximos de a, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.*

Podemos dizer de outras maneiras que, a é aderente a X:

(i) Toda vizinhança de a tem pontos de X

(ii) para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B(a;\epsilon) \bigcap X \neq \emptyset$

(iii) para todo aberto A que contém a, tem-se $A \bigcap X \neq \emptyset$

Definição 1.4.2. *O fecho de um conjunto X, no espaço métrico M, é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X. Ou seja, afirmar que $a \in \overline{X}$ quer dizer que a é aderente a X em M.*

Exemplo 1.4.3. *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos da fronteira ∂X também são aderentes a X.*

- *Na reta real,se $A = (a, b)$ ou $A = (a, b]$ ou $A = [a, b)$ então o $\overline{A} = [a, b]$*

Definição 1.4.4. *Seja M um espaço métrico, um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M, quando $\overline{X} = M$, isto é, quando toda bola aberta de M contém algum ponto de X.*

Exemplo 1.4.5. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, é denso em $\mathbb{R}$ do mesmo modo o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais.*

De fato, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais, e como vimos anteriormente, as bolas no conjunto dos números reais, são intervalos.

Definição 1.4.6. *Seja M um espaço métrico, dizemos que $F \subset M$ é fechado em M, se seu complementar $M - F$ seja aberto em M.*

Proposição 1.4.7. *Se $F \subset M$, F é fechado se, e somente se, contém todos os pontos aderentes de F, ou seja, $\overline{F} = F$*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Temos que F é fechado, ou seja, $M - F$ é aberto, o que significa que para todo a $\in M - F$ existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset M - F$. Assim, para todo a $\in M - F$, existe $B(a; r)$ que não contém pontos de F. Logo, esses pontos que não pertencem a F também não são aderentes a ele, pois $B(a; r) \bigcap F = \emptyset$.

($\Leftarrow$) F contém todos os seus pontos aderentes de F. Assim, os pontos que não pertencem a F também não são aderentes a ele, ou seja, para todo a $\in M - F$, podemos encontrar $B(a; r) \bigcap F = \emptyset$. Então, para todo a $\in M - F$, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset M - F$, ou seja, $M - F$ é aberto, e portanto F é fechado.

□

Exemplo 1.4.8. *A fronteira ∂X de um conjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M.*

De fato, o conjunto ∂X contém todos os seus pontos aderentes,pois todos são pontos de fronteira de X. Pela proposição anterior então o conjunto ∂X é fechado.

Proposição 1.4.9. *Sejam M,N espaços métricos. A função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(\overline{F})$ de todo conjunto fechado $\overline{F} \subset N$ seja um subconjunto fechado de X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)Suponha, primeiramente, que f é contínua. Provemos que a imagem inversa de todo conjunto fechado $\overline{F} \subset N$é fechado em M. Como $\overline{F} \subset N$ é fechado, então por definição o complementar de $\overline{F}$ (denotado por $\overline{F}^c$) é aberto, pela Proposição 1.3 $f^{-1}(\overline{F}^c) = f^{-1}(\overline{F})^c$ é aberto, logo, $f^{-1}(\overline{F})$ é fechado.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que a imagem inversa de todo conjunto fechado em N é fechado em M. Mostremos que f é contínua. Dado $\overline{A} \subset N$ aberto, então seu complementar é fechado. Daí $f^{-1}(\overline{A}^c) = f^{-1}(\overline{A})^c$ é fechado em M, e o complementar de $f^{-1}(\overline{A})^c$ é aberto, logo, $f^{-1}(\overline{A})$ é aberto. Portanto, pela Proposição 1.3, f é contínua.

□

Observação 1.4.10. *A noção de "Fechado"não é o contrário de "Aberto". Quando um conjunto não é fechado, não podemos afirmar que ele é aberto. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, não é fechado e nem aberto, o mesmo ocorre com seu complementar em $\mathbb{R}$. Também existem conjuntos que são ao mesmo e tempo abertos e fechados. Como o Espaço todo, e o vazio.*

Definição 1.4.11. *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Diz-se que a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ a interseção*

$$(B(a;\epsilon) - \{a\}) \bigcap X$$

é um conjunto infinito. Ou seja, toda bola de centro a, contém infinitos pontos distintos de a. o conjunto dos pontos de acumulação de X, denotaremos por X'.

Exemplo 1.4.12. *No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ o único ponto de acumulação é o 0.*

Capítulo

2

Espaços Topológicos

2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1.1. *Dado um conjunto X, dizemos que uma topologia num conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, chamados os subconjuntos abertos satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *X e o subconjunto $\emptyset$ são abertos;*

(ii) *A reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;*

(iii) *Dados G_1 e G_2 subconjuntos abertos, então $G_1 \cap G_2$ é aberto.*

Definição 2.1.2. *Chamaremos de Espaço Topológico o par $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ uma topologia em X. Diremos apenas de "Espaço topológico X" citando a topologia $\mathcal{T}$ quando necessário.*

Exemplo 2.1.3. *Dado um conjunto $\mathbb{E} \neq \emptyset$. a coleção $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{E})$ é uma topologia sobre $\mathbb{E}$. Essa topologia chama-se topologia discreta sobre $\mathbb{E}$.*

Exemplo 2.1.4. *Um exemplo bem simples de espaço topológico condiste em Considerar na topologia $\mathcal{T}$ em X, onde os únicos abertos sejam X e o conjunto vazio. Esta topologia recebe o nome de Topologia Caótica.*

Proposição 2.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, dado $a \in X$, então $a \in \bar{A}$ se, e somente se, $G \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ para todo aberto G que contém a.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Vamos supor que existe um aberto B de maneira que, $a \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Portanto B^c é fechado que contém A e não contém a, chegando a um absurdo.

($\Leftarrow$) Se $a \notin A$, então existirá um fechado $F \supset A$ tal que $a \notin F$. Logo F^c é um aberto que contem a, cuja intersecção $F^c \cap A$ é $\emptyset$. Desse, chegamos a um absurdo pois contraria a hipótese.

□

Definição 2.1.6. *Dado espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e $A \subset X$ e $a \in X$, dizemos que a é ponto de acumulação se para todo aberto G que contenha a temos:*

$$(G - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

Observação 2.1.7. *Chamaremos o conjunto dos pontos de acumulação de A por Derivado de A, denotaremos este conjunto por A'*

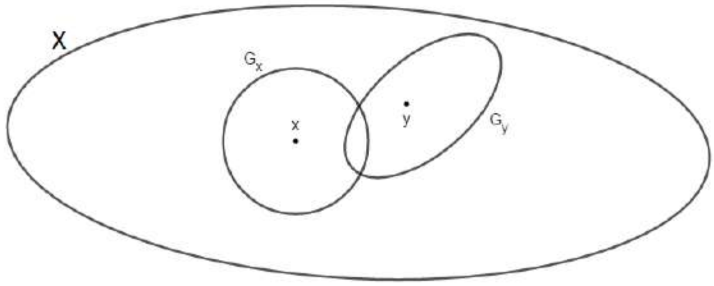
2.2 Axiomas de Separação

Nesta seção trabalharemos alguns axiomas que nos faram observar algumas propriedades topológicas afim de distinguir os elementos.

Diremos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é um espaço T_1 se satisfaz o seguinte axioma, chamado axioma T_1

"Dados quaisquer x e y $\in X$, $x \neq y$ então existem abertos G_x e G_y tais que, $x \in G_x$, $y \in G_y$ e que $x \notin G_y$, $y \notin G_x$."

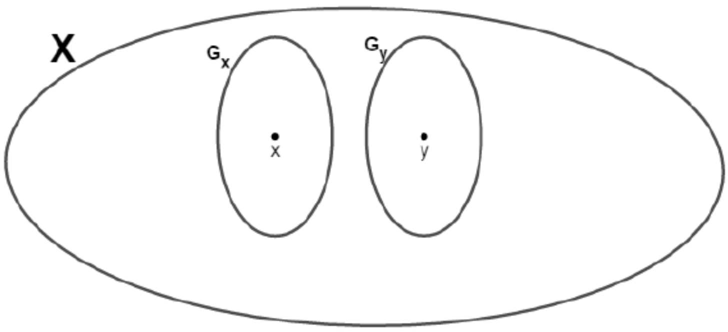
Figura 2.1: Ilustração de um espaço topológico T_1



Fonte: Autor, 2020.

Definição 2.2.1. *Dizemos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é chamado de T_2 ou espaço de Hausdorff se o seguinte axioma se verifica: "Dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, então existem abertos disjuntos G_x e G_y de maneira que $x \in G_x$ e $y \in G_y$."*

Figura 2.2: Ilustração de um espaço topológico de Hausdorff



Fonte: Autor, 2020.

Observação 2.2.2. *Comparando os dois Axiomas de separação temos que, todo espaço que é T_2 também o é T_1*

Proposição 2.2.3. *Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ se $(x_1, x_2, \cdots)$ é uma sequência convergente em X no qual vale o axioma T_2. Então o limite dessa sequência será único.*

Demonstração. Suponha que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, com $a \neq b$. Vamos tomar abertos G_a e G_b disjuntos de maneira que $a \in G_a$ e $b \in G_b$. Então existem indicies r,s tais que $x_n \in G_a$ $\forall n > r$, e $x_n \in G_b \forall s > n$. tomamos o $t = \max\{r, s\}$. Daí teremos que $x_n \in G_a \cap G_b, \forall t > n$. Portanto chegamos a um absurdo pois $x_n \in G_a \cap G_b = \emptyset$.

$\square$

Proposição 2.2.4. *Seja X um espaço T_2. Se $a \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$, então $(G - \{a\}) \cap A$ é infinito, dado qualquer aberto que contém a.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por absurdo. Suponha que $(G - \{a\}) \cap A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ não vazio e finito. Como cada $x_i \neq a$, existem G_j, H_j abertos e disjuntos de maneira que $a \in G_j$ e $x_i \in H_j$ e $G_j \cap H_j = \emptyset$. Então $S = G \cap G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n$ é um aberto que contém a e tal que $S - \{a\} \cap A = \emptyset$, o que é um absurdo.

$\square$

2.3 Bases

Definição 2.3.1. ***(Base)*** *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathfrak{B}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{T}$. Dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma base para $\mathcal{T}$ se para todo $A \in \mathcal{T}$ acontece:*

$$A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B.$$

Observação 2.3.2. *Note que $\mathfrak{B} \in \mathcal{T}$, portanto qualquer união de elementos de $\mathfrak{B}$ pertencerá também a $\mathcal{T}$. Esses elementos de $\mathfrak{B}$ são chamados de* ***abertos básicos*** *.*

Observação 2.3.3. *Se $\mathfrak{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$, dizemos que a topologia $\mathcal{T}$ é gerada por $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{B}$ gera a topologia $\mathcal{T}$.*

Exemplo 2.3.4. *Seja $(X, \mathcal{T})$ seja $\mathcal{T}$ a topologia discreta, então a base $\mathfrak{B} = \{X\}$.*

2.4 Sub-bases

Definição 2.4.1. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathfrak{G}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\mathfrak{G} \subset \mathcal{T}$. Dizemos que $\mathfrak{G}$ é uma* ***sub-base*** *de $\mathcal{T}$ se a coleção de interseções finitas de elementos de $\mathfrak{G}$ for uma base de τ.*

Observação 2.4.2. *Geralmente $\mathfrak{G}$ não é uma base de $\mathcal{T}$, porque os elementos de $\mathcal{T}$ não podem ser escritos necessariamente como união de elementos de $\mathfrak{G}$.*

Exemplo 2.4.3. *Toda topologia é base e sub-base de si mesma.*

2.5 Topologia Relativa

Definição 2.5.1. *Dado $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\emptyset \notin Y \subset X$, então:*

(i) *O conjunto: $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y | A \in \mathcal{T}\}$. é uma topologia sobre Y chamada* ***topologia relativa*** *a Y.*

(ii) *O par $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é chamado de* ***subespaço topológico*** *de $(X, \mathcal{T})$.*

(iii) *Os elementos de $\mathcal{T}_Y$ são denominados de* ***abertos relativos***.

Observação 2.5.2. *Os abertos relativos geralmente não são abertos no espaço total.*

Exemplo 2.5.3. *Considere $\mathbb{R}^2$ com a topologia usual, o conjunto*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

com a topologia relativa é dito circulo unitário . os abertos relativos em S^1 serão os arcos abertos de círculos.

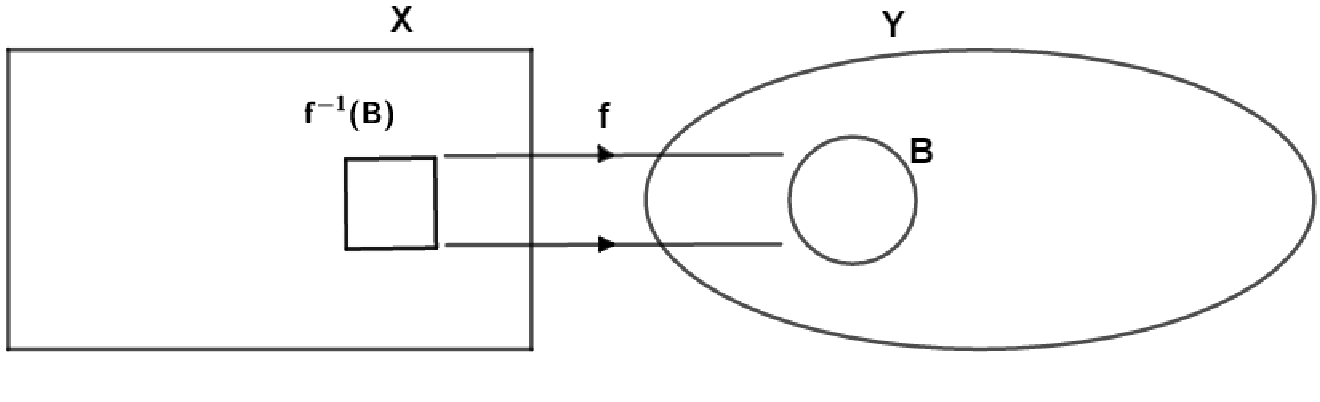
Capítulo 3

Funções contínuas em espaços topológicos

3.1 Funções contínuas

Definição 3.1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é contínua se dado aberto $B \subset Y$ a imagem inversa $f^{-1}(B)$ for um aberto em X.*

Figura 3.1: Ilustração de uma aplicação contínua



Fonte: Autor, 2020.

Observação 3.1.2. *Dizemos que f é continua no ponto $a \in X$ quando, para cada aberto $B \subset Y$, com $f(a) \in B$, existir um aberto em $A \subset X$, de modo que $a \in A$, de maneira que $f(A) \subset B$.*

Exemplo 3.1.3. *Toda função constante é contínua.*

Proposição 3.1.4. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada ponto a pertencente a X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como temos que $f : X \to Y$ é contínua então, tomemos $a \in X$ e um aberto $B \subset Y$ com $f(a) \in B$, como B é aberto por hipótese a imagem inversa de B também é $A = f^{-1}(B)$, daí temos que $A \in X$ é aberto. Portanto como $a \in A$ e $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, temos a continuidade de f no ponto a.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos que f é contínua em cada $a \in X$. Tome $B \subset Y$ aberto, seja $A = f^{-1}(B)$. para cada $x \in A$ temos $f(x) \in B$ como f é contínua em x, existirá um aberto $A_x \subset X$ com $x \in A_x$, $f(A_x) \subset B$. noutros termos, temo-se $\{x\} \subset A_x \subset A \; \forall x \in A$. Portanto $A = \bigcup_{x \in A}\{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$, ou seja, $A \bigcup_x A_x$. Desse modo, $A = f^{-1}(B)$ é aberto em X por ser uma reunião de abertos, assim concluímos que $f : X \to Y$ é contínua. □

Exemplo 3.1.5. *Se a topologia de X é a discreta, então $f : X \to$ é continua, independente da topologia de Y.*

Proposição 3.1.6. *Seja $Y \subset X$. A topologia relativa $\mathcal{T}_Y$ pode ser caracterizada sobre o conjunto Y tal que a função inclusão:*

$$i : Y \to X$$

é contínua.

Demonstração. Seja $V \in \mathcal{T}$, a continuidade de i implica em que $i^{-1}(V) = V \cap Y$ deve ser aberto em Y; portanto qualquer topologia onde i for contínua deve conter $\mathcal{T}_Y$. □

Proposição 3.1.7. *Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ e $(Z, \mathcal{T}_3)$ espaços topológicos.*

(i) *Se* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *são contínuas, então:*

$$g \circ f : X \to Z$$

é contínua

(ii) *Se* $f : X \to Y$ *é contínua e* $A \subset X$ *é um subespaço topológico, então:* $f|_A : A \to Y$ *é contínua*

(iii) *Se* $f : X \to Y$ *é contínua e* $f(X) \subset Y$ *é subespaço topológico, então:*

$$f : X \to f(X)$$

é contínua.

Demonstração. (i) temos que $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \circ g^{-1}(V)$. De fato, temos que $g^{-1}(V)$ é aberto em Y, decorre que $f^{-1}(g^{-1}(V)) = f^{-1} \circ g^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(V)$ é aberto em X.

(ii) Veja que $f|_A = f \circ i$, onde i é a identidade $i : A \to X$ é a inclusão, portanto pelo item (i) podemos concluir que a função é contínua.

(iii) Temos que $f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(V)$ que é aberto em X.

□

3.2 Topologia produto

Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ e com o produto cartesiano $X \times Y$ denotaremos:

$$pr_1 : X \times Y \to X$$

$$pr_2 : X \times Y \to Y$$

são denotadas as respectivas projeções canônicas projeções canônicas , onde $pr_1(x, y) = x$ e $pr_2(x, y) = y$.

$$pr_1^{-1}(U) = X \times Y$$

$$pr_2^{-1}(V) = X \times Y$$

$$pr_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = U \times V$$

.

Note que

$$\mathfrak{G}_{pr} = \{pr^{-1}(U),\ pr_2^{-1}(V) | U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

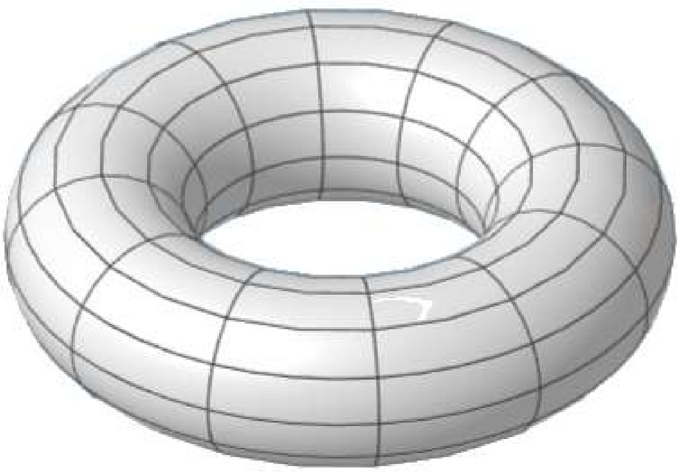
e

$$\mathfrak{B}_{pr} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Essas são a base e sub-base que geram a topologia sobre o produto cartesiano $X \times Y$, que torna as projeções contínuas. Esta topologia por sua vez se chama **topologia produto.**

Exemplo 3.2.1. *Seja S^1 com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$; então é chamado de* ***toro*** *$T^2 = S^1 \times S^1$ com a topologia produto.*

Figura 3.2: Toro $T^2 = S^1 \times S^1$



Fonte: Autor, 2020.

Proposição 3.2.2. *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ e $(Z, \mathcal{T}_Z)$ espaços topológicos, o espaço topológico produto $(Y \times Z, \mathcal{T}_p)$, $f_1 : X \to Y$ e $f_2 : X \to Z$ e definimos $f : X \to Y \times Z$ por:*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Então f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $pr_1 : Y \times Z \to Y$ e $pr_2 : Y \times Z \to Z$ as projeções. como $f_i = pr_i \circ f$, se f é contínua, então $f_i = pr_i \circ f$ são contínuas, para $i = 1, 2$

($\Leftarrow$) Se as f_i são contínuas, tome $U \times V$ um aberto básico do cartesiano $Y \times Z$, então:

$$f^{-1}(U \times V) = {f_1}^{-1}(U) \cap {f_2}^{-1}(V)$$

. Portanto f é contínua.

$\square$

Definição 3.2.3. *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos, dizemos que a função $f : X \to Y$ é **aberta (fechada)** se para qualquer aberto $(fechado)$ $U \in X$, temos que $f(U)$ é aberto (fechado) em Y.*

Proposição 3.2.4. *Seja $f : X \to Y$. é fechada se, e somente se, $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese temos que f é fechado, então $\overline{f(A)}$ é fechado e $f(A) \subset f(\overline{A})$, portanto

$$\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A}).$$

($\Leftarrow$) Seja $F \subset X$ fechado, logo por hipótese:

$$f(F) \subset \overline{f(A)} \subset f(\overline{F}) = f(F);$$

Portanto, $\overline{f(F)} = f(F)$ e $f(F)$ é fechado.

$\square$

Exemplo 3.2.5. *Sejam* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *espaços topológicos. A função identidade*

$$id : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$$

é aberta $(fechada)$ *se, e somente se,* $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Y$*, mas não é contínua quando* $\mathcal{T}_X \neq \mathcal{T}_Y$*.*

Capítulo 4

Homeomorfismos

Neste capítulo trataremos um fato interessante. Na topologia um fato importante é saber se os espaços são diferentes ou não. Trabalharemos o conceito de homeomorfismo que nos poderá dizer se do ponto de vista topológico alguns conjuntos são diferentes ou não.

4.1 Homeomorfismos

Definição 4.1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos dizemos que $f : X \to Y$ é um* ***homeomorfismo*** *se:*

(i) f é bijetora;

(ii) f é contínua;

(iii) f^{-1} também é contínua.

Quando os espaços topológicos X e Y são homeomorfos denotaremos por $X \cong Y$.

Exemplo 4.1.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por:*

$$f(t) = \frac{t}{1 + |t|}$$

.

Temos que f é bijetiva, contínua e sua inversa é dada por:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|},$$

também é contínua. Portanto, $\mathbb{R} \cong (-1,1)$. Por transitividade o homeomorfismo, temos que:

$$\mathbb{R} \cong (a,b).$$

Exemplo 4.1.3. *Seja $\mathbb{R}^2$ com a topologia induzida e $A \subset \mathbb{R}^2$ dada por:*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b\}.$$

A é um anel, daí:

$$A \cong S^1 \times [a,b]$$

definiremos $f : A \to S^1 \times [a,b]$ e $f^{-1} : S^1 \times [a,b] \to A$ por:

$$f(x,y) = ((\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2})\ f^{-1}((x,y),t) = (tx,ty).$$

Note que f e f^{-1} são bijetoras e contínuas, portanto f é um homeomorfismo.

Exemplo 4.1.4. *Sejam o circulo S^1 e o quadrado $Q = \{(x,y) | \max\{|x|,|y|\} = 1\}$ em $\mathbb{R}^2$ com a topologia induzida pela topologia usal de $\mathbb{R}^2$, então:*

$$S^1 \cong Q.$$

Definimos $f : S^1 \to Q$ levando os arcos de S^1 nos lados Q do quadrado respectivamente.

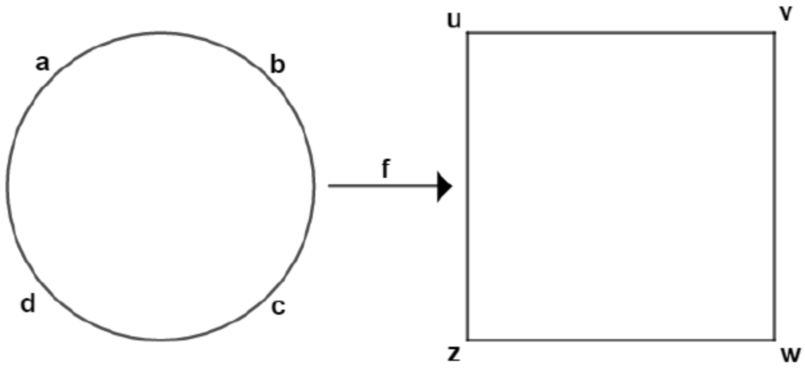
i. $ab \to uv$

ii. $bc \to vw$

iii. $cd \to wz$

iv. $da \to zu$

Figura 4.1: O homeomorfismo entre S^1 e o quadrado Q.



Fonte: Autor, 2020.

Isto é:

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) \text{ e } f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right),$$

onde $m = \max\{|x|, |y|\}$ *e* $r = \sqrt{x^2+y^2}$*, note que* f *e* f^{-1} *são bijetivas e contínuas logo* f *é um homeomorfismo.*

4.2 Homeomorfismos Locais

Definição 4.2.1. *Dados* X *e* Y *espaços topológicos e* $f : X \to Y$*. Dizemos que* f *é um* ***homeomorfismo local*** *se para qualquer* $x \in X$ *existe* $U \subset X$ *uma vizinhança de* x *de modo que,* $f(U) = V$ *é aberto em* Y *e* $f : U \to V$ *é um homeomorfismo.*

Observação 4.2.2. *Sejam* $U \subset X$*,* $V \subset Y$ *e* $f : U \to V$ *um homeomorfismo, então para qualquer aberto* $U' \subset U$*, teremos que* $f(U')$ *é aberto em* V*, logo é aberto em* Y*.*

Proposição 4.2.3. *Dados* X*,* Y *espaços topológicos. Se* $f : X \to Y$ *é um homeomorfismo local, então* f *é aberta.*

Demonstração. Tome $A \subset X$ aberto, para todo $x \in A$ $\exists U_x \subset A$ vizinhança de x de maneira que:

$$f : u_x \to V_x$$

onde $f(U_x) = V_x$. tome $U'_x = U_x \cap A$. pela observação na definição de homeomorfismo local $f(U'_x)$ é aberto em Y, como:

$$A = \bigcup_{x \in A} U'_x$$

$$f(A) = f(\bigcup_{x \in A} U'_x) \bigcup_{x \in A} f(U'_x)$$

note que esta é aberta em Y, e portanto f é aberta.

$\square$

Capítulo

5

Topologia quociente

5.1 Topologia quociente

Definição 5.1.1. *Dado $(X, \mathcal{T})$, Y um conjunto não vazio e $f : X \to Y$ sobrejetiva. definimos em Y a seguinte topologia:*

$$\mathcal{T}_f = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}.$$

Note que, $\mathcal{T}_f$ é uma topologia sobre Y. Chamamos essa topologia $\mathcal{T}_f$ de ***topologia quociente*** *em Y e induzida por f.*

Exemplo 5.1.2. *Seja $X\{a, b, c\}$ e $\mathbb{R}$ com a topologia usual, definimos $f : \mathbb{R} \to X$ por:*

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ se } x > 0 \\ b \text{ se } x < 0 \\ c \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Então $\mathcal{T}_f = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ é a topologia quociente X induzida por f.

Definição 5.1.3. *Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos o conjunto dos pares não ordenados:*

$$\mathbb{PR}^n = \{\{x, -x\} \mid x \in S^n\}$$

De maneira natural temos a função sobrejetiva:

$$\prod : S^n \to \mathbb{P}\mathbb{R}^n$$

de maneira que $\prod(x) = \{x, -x\}$. *Assim o par* $(\mathbb{P}\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\prod})$ *é chamado de Espaço Projetivo Real de dimensão n.*

5.2 Espaços Quocientes

Considere $\sim$ uma relação de equivalência sobre X, e $X/\sim$ o conjunto das classes de equivalência de X, definimos:

$$\prod : X \to X/\sim$$

$$x \to [x]$$

Onde [x] é classe de equivalência que contém x. $\prod$ é chamada de projeção canônica e é sobrejetiva.

Definição 5.2.1. *Dado* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. Chamamos o par* $(X/\sim, \mathcal{T}_{\prod})$ *de* ***Espaço Quociente*** *de X.*

5.3 O toro como Espaço Quociente

Consideremos $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ e com a topologia usual de $\mathbb{R}^2$. Vamos considerar I^2 com a seguinte relação de equivalência:

$$(x, y) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) \text{ ou } (0, y) \sim (1, y) \ \ e(x, 0) \sim (x, 1),$$

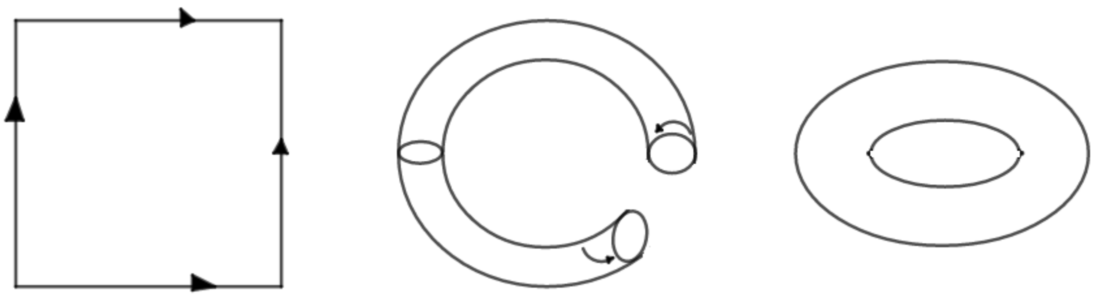
para quaisquer $(x, y),\ (x_1, y_1) \in I^2$

Note que se $x, y \neq 0, 1$, temos então $[(x, y)] = \{(x, y)\}$ e $[(0, y)] = [(1, y)]$ se $y = 0$, então $[(x, 0)] = [(x, 1)]$. Em particular $[(0, 0)] = [(1, 0)] = [(0, 1)] = [(1, 1)]$.

Portanto, $\prod : I^2 \to (I^2/\sim)$ é uma identificação. Notemos que $\prod$ é bijetora com exceção de $(0, y),\ (1, y),\ (x, 0),\ (x, 1)$ e

$$(I^2/\sim) \cong S^1 \times S^1.$$

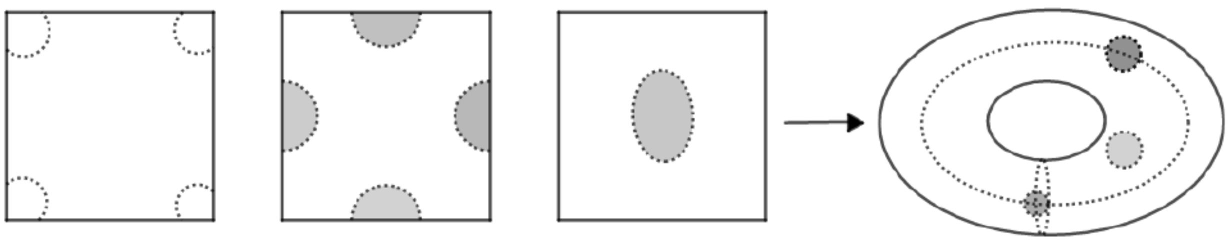
Figura 5.1: O toro como espaço quociente.



fonte: Autor, 2020.

Temos aqui as possíveis vizinhanças dos pontos do toro:

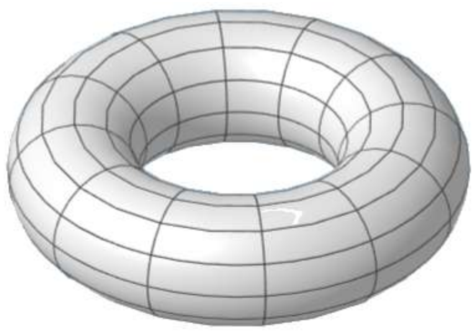
Figura 5.2: Possíveis vizinhaças do toro



Fonte: Autor, 2020.

Assim temos:

Figura 5.3: O toro



Fonte: Autor, 2020.

Referências Bibliográficas

[B] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag New York Inc., 1993.

[E] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[E2] E. L. Lima, *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[M] M. A. Vilches, *TOPOLOGIA GERAL*. Rio de Janeiro: IME/UERJ, 2018.

[K] J. L. Kelley, *General Topology*. Van Nostrand, Princeton, N. J.

[H] H. H. Domingues, *ESPAÇOS MÉTRICOS E INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA*. São Paulo: Atual, 1982.